Lösungen (5. – 8. Klassen)

1. Gefalteter Geldschein

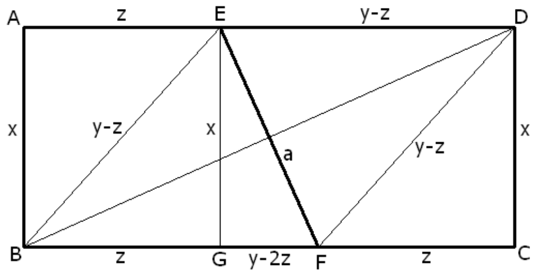
x sei die Breite, y die Länge des Geldscheins. Mit z wird die Streckenlänge von AE abgekürzt. ED = EB = y – z, da diese beiden Linien dieselbe waren, als der Geldschein noch gefaltet war. Im Dreieck AEB lässt sich z durch x und y darstellen, da hier der Satz des Pythagoras gilt:

$z^2 + x^2 = (y - z)^2$

$z^2 + x^2 = y^2 - 2yz + z^2 \quad |- z^2 - y^2$

$x^2 - y^2 = -2yz \quad |:(-2y)$

$z = \dfrac{y^2 - x^2}{2y}$ **(1)**



BG = AE = z, also GF = y – 2z.
EG = AB = x.
Im Dreieck EGF lässt sich nun $x^2 + (y - 2z)^2 = a^2$ feststellen.
z kann man durch **(1)** ersetzen, woraus sich für a der Wert $\frac{x}{y}\sqrt{x^2 + y^2}$ ergibt.

Die Faltkante hat also in Abhängigkeit von x und y eine Länge von $\frac{x}{y}\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Haufen mit Rest

Wenn eine Zahl bei Division durch 4 den Rest 1 ergibt, tut sie dies auch bei Division durch 2. Wenn eine Zahl bei Division durch 6 den Rest 1 lässt, tut sie dies auch bei Division durch 2 oder 3, analog lässt sich für die Division durch 8 und 9 argumentieren. Also kann man in der Angabe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 auf 7, 8, 9, 5 reduzieren.
(Anmerkung: Man kann diese Argumentation auch so sehen: Die Zahl hat bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 den Rest 1 genau dann, wenn sie bei Division durch kgV(2;3;4;5;6;7;8;9;10) = 2520 = 5·7·8·9 den Rest 1 hat.)
7·8·9·5+1 ist die erste Zahl, die bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 den Rest 1 ergibt, sie ist allerdings nicht durch 11 teilbar. Das Doppelte von 5·7·8·9 ist wieder durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 teilbar, ebenso das 3-Fache, das 4-Fache, usw.
Dies sind die Vielfachen von 7·8·9·5 um 1 vermehrt, die kleiner als 50000 sind:

2521	5041	7561	10081	12601	15121
17641	20161	22681	**25201**	27721	30241
32761	35281	37801	40321	42841	45361
47881.					

Einzig und alleine **25201** ist durch 11 teilbar – sie ist die Zahl der Steine; die nächste Zahl, die die Bedingungen erfüllt, ist erst 52921.

3. Teil-Zahlen 2

Man beweist diesen Sachverhalt am besten mit Hilfe des *Schubfachprinzips.* D. h. man bildet wiederum n „Schubfächer“, in die man die 2n Zahlen einordnet. Nur ist es bei dieser Aufgabe das Problem, eine günstige Zuordnung zu finden! Die Schubfächer sehen so aus:

Das Schubfach 1 besteht aus 1, 2, 4, 8,…, allgemein den Zahlen der Form $1 \cdot 2^k$.
Das Schubfach 2 besteht aus 3, 6, 12, 24, … den Zahlen der Form $3 \cdot 2^k$.
Das allgemeine Schubfach m besteht aus den Zahlen der Form $(2m - 1) \cdot 2^k$.
Wenn wir aus diesen n Schubfächern nun n+1 Zahlen ziehen, existiert mindestens ein Schubfach, aus dem wir zwei Zahlen gezogen haben. Da bei diesen Zahlen durch die Konstruktion der Schubfächer sicher eine das Vielfache der anderen ist, ist die Behauptung bewiesen.