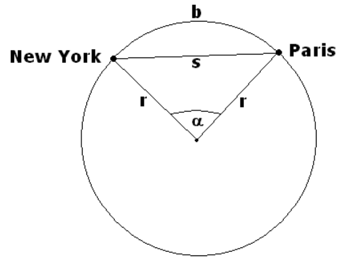
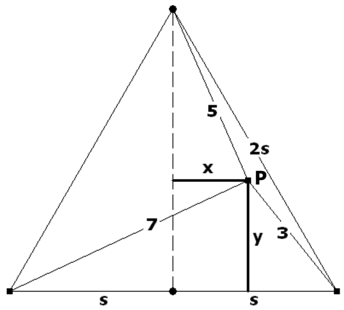
LÖSUNGEN (5. – 8. KLASSEN)

1. Transatlantiktunnel



Mit einer guten Skizze und ein wenig Trigonometrie ist diese Aufgabe recht schnell gelöst: Der kürzeste Abstand Paris-New York entspricht einem 7000 km langen Kreisbogen b.
b verhält sich zum Erdumfang wie der Zentriwinkel α zu 360°, woraus $\alpha = 62{,}96°$ folgt. Der Tunnel entspricht einer Kreissehne s. Diese Sehne s kann zum Beispiel mit dem Cosinussatz berechnet werden:
$s^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\alpha = r^2(1 - \cos\alpha)$, was für s einen Wert von $6653\ km$ liefert. Das ist knapp $5\,\%$ weniger als die Landentfernung.

2. Punkt im Dreieck



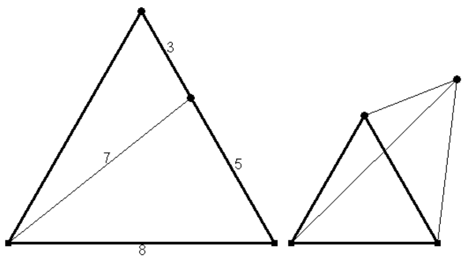
Ein Punkt hat von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks die Entfernungen 3, 5 und $7\ cm$. Berechne die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks!
s sei die halbe Seitenlänge des Dreiecks. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Höhe h herausfinden:
$h^2 = (2s)^2 - s^2 = 3s^2$, also $h = \sqrt{3}s$.
x und y sind die „Koordinaten" des gegebenen Punktes P.
Da wir wissen, dass P von den drei Eckpunkten 3, 5 bzw. $7\ cm$ entfernt ist, können wir mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes drei Gleichungen aufstellen, mit denen wir die drei Unbekannten unseres Problems – nämlich x, y und s – bestimmen können:

$$3^2 = y^2 + (s-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 9 - (s-x)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$7^2 = y^2 + (s+x)^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 49 = 9 - (s-x)^2 + (s+x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 49 = 9 + 4sx \quad \Leftrightarrow \quad sx = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{10}{s} \qquad \textbf{(2)}$$

$$5^2 = x^2 + \left(s\sqrt{3} - y\right)^2 \overset{(1)}{=} x^2 + \left(s\sqrt{3} - \sqrt{9-(s-x)^2}\right)^2 \overset{(2)}{=} \left(\frac{10}{s}\right)^2 + 3s^2 - 2s\sqrt{3}\sqrt{9-(s-x)^2} + 9 - (s-x)^2$$

Nach ein paar Vereinfachungsschritten erhält man die Gleichung $4s^4 - 83s^2 + 304 = 0$, die wir durch die Substitution $s^2 = t$ in die quadratische Gleichung $4t^2 - 83t + 304 = 0$ umformen können. Sie hat die beiden Lösungen $t_1 = 16$ und $t_2 = \frac{19}{4}$, was für s die vier Lösungen $s_{1/2} = \pm 4$ und $s_{3/4} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$ liefert.
Nur die beiden positiven Lösungen sind als Streckenlängen sinnvoll, und beide liefern mögliche Seitenlängen, nämlich $8\ cm$ bzw. $\sqrt{19} \approx 4{,}36\ cm$ (siehe Skizzen). – Man kann sich streiten, ob die zweite Lösung eine Lösung im Sinne der Aufgabe ist, da der Punkt nicht im Dreieck liegt.



3. Teil-Zahlen

Zu zeigen ist, dass unter $n+1$ Zahlen der Menge $\{1, 2, \dots, 2n\}$ stets zwei teilerfremde dabei sind.
Es genügt dazu zu zeigen, dass mindestens zwei aufeinander folgende Zahlen dabei sind, denn diese sind teilerfremd: $ggT(n; n+1) = 1$.
Der Beweis funktioniert mit Hilfe des Schubfachprinzips: Wir bilden n Schubfächer, in die wir je zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen zuordnen.
Das erste Schubfach besteht also aus 1 und 2, das zweite Schubfach aus 2 und 3, …, das letzte Schubfach aus $2n-1$ und $2n$.
Wenn wir aus diesen n Schubfächern nun $n+1$ Zahlen ziehen, existiert mindestens ein Schubfach, aus dem wir beide Zahlen gezogen haben. Da diese aufeinander folgend sind, ist ihr größter gemeinsamer Teiler 1.