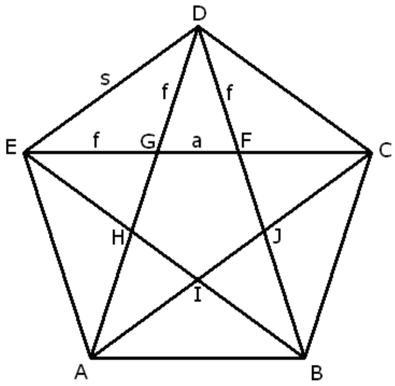
math∈-corner **Februar 2015**

LÖSUNGEN (5. – 8. KLASSEN)

1. Türme

In jeder Spalte und in jeder Zeile darf nur ein Turm stehen. Um alle Möglichkeiten zu zählen, ist es günstig, so zu denken: Turm 1 wird in Spalte 1 gestellt, Turm 2 in Spalte 2, usw. Turm 1 stehen 8 Felder zur Verfügung, in die er gestellt werden kann. Turm 2 kann nicht in die gleiche Zeile wie Turm 1 gestellt werden, da sie sich sonst ja bedrohen würden. Für ihn bleiben noch 7 Felder, daher haben wir $8 \cdot 7$ Möglichkeiten. Turm 3 wird in 2 Feldern bedroht und hat daher noch 6 Felder zur Auswahl, das macht $8 \cdot 7 \cdot 6$ Möglichkeiten. Turm 4 wird in 3 Feldern bedroht und hat noch 5 Felder zur Wahl, das ergibt $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Möglichkeiten: Man sieht, dass sich für alle acht Türme insgesamt **8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 8! = 40 320** Möglichkeiten ergeben, bedrohungsfrei gestellt zu werden.

2. Fünfeck im Fünfeck



Die Winkelsumme in jedem Fünfeck beträgt 540°, da man es in drei Dreiecke á 180° Winkelsumme zerlegen kann. Beim regelmäßigen Fünfeck beträgt daher jeder Innenwinkel 540° : 5 = 108°.
Dreieck ECD ist gleichschenklig mit CD = DE, daher sind die Basiswinkel <ECD und <DEC gleich groß, nämlich (180° – 108°) : 2 = 36°. Weil das auch für die vier anderen Dreiecke DBC, CAB, BEA, ADE gilt, sind auch die entsprechenden Basiswinkel 36° groß. Da 36° = 108° : 3 ist, bedeutet das, dass die Diagonalen des Fünfecks die Winkel dreiteilen.
Dreieck GFD ist gleichschenklig mit FD = DG, daher sind die Basiswinkel <ECD und <DEC gleich groß, nämlich (180° – 36°) : 2 = 72°.
Da <EFD = <FDE = 72°, ist Dreieck EFD gleichschenklig mit DE = FE, also gilt die Beziehung
a + f = s bzw. **f = s – a** **(1)**
Da die Dreiecke EFD und DGF in allen Winkeln übereinstimmen, also ähnlich sind, kann man eine Verhältnisgleichung aufstellen: **s : f = f : a** bzw. **f^2 = sa** **(2)**
f in Gleichung (2) lässt sich über (1) ausdrücken: $(s-a)^2 = sa$ bzw. $s^2 - 3sa + a^2 = 0$.
Löst man diese quadratische Gleichung nach s auf, ergibt sich $s_{1,2} = \frac{a}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$. Da s > a, muss $s = \frac{a}{2}\left(3+\sqrt{5}\right) \approx 2{,}618a$ sein.

Das Verhältnis der beiden Seiten beträgt $1 : \frac{(3+\sqrt{5})}{2}$.

3. Atemlos

Zuerst berechnet man die Geschwindigkeiten beim Hoch- und Runtergehen (in Stufen/Zeit): 50/r ist die Geschwindigkeit abwärts und 125/t die Geschwindigkeit aufwärts. In der Angabe steht aber, dass er beim Hochgehen 5-mal so schnell ist. Damit man eine Gleichung aufstellen kann, muss 50/r mit 5 multipliziert werden, damit es gleich viel ist wie 125/t.

$$5 \cdot 50/r = 125/t \qquad | \cdot rt$$
$$250t = 125r \qquad | :125$$
$$2t = r$$

⇨ r ist doppelt so groß wie t, d.h. er braucht zum Hinuntergehen doppelt so lange wie zum Hinaufgehen. In der doppelten Zeit wird der Mann von Frau Kalkulus auch die doppelte Anzahl Stufen (v bzw. 2v) hinunterbewegt.

$$50 + 2v = 125 - v \qquad | -50 + v$$
$$3v = 75 \qquad | :3$$
$$v = 25$$

x (=Anzahl der Stufen) = 50 + 2 · 25 = **100**