math∊-corner Februar 2015

LÖSUNGEN (1. & 2. KLASSEN)

1. Primzahlen überall!

a) Die ersten zwölf Primzahlen findest du natürlich leicht heraus – entweder im Mathematikbuch oder im Internet oder du hast sie sogar selbst aufgezählt. Sie lauten: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$. Paul ist also 37 Jahre alt geworden.

b) Das geht nicht, weil bei drei aufeinanderfolgenden Zahlen mindestens eine gerade Zahl dabei sein muss und diese ist durch zwei teilbar, also keine Primzahl. Eine der drei Zahlen ist sicherlich durch 3 teilbar (denn jede dritte Zahl von 1 weg gezählt ist durch 3 teilbar). Die Primfaktoren 2 und 3 kommen also sicher in diesen drei aufeinanderfolgenden Zahlen vor!

c) Unter den vier Zahlen befinden sich sicher zwei ungerade Zahlen, die in Summe eine gerade Zahl ergeben und zwei gerade Zahlen, die wiederum zur vorherigen Summe dazugezählt eine gerade Zahl entstehen lassen. Eine Primzahl kann aber nicht gerade sein, sonst wäre sie ja durch 2 teilbar und keine Primzahl mehr!
Mathematisch angeschrieben: Nennen wir die erste Zahl x. Dann ist die Summe der vier Zahlen: $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4 \cdot x + 6$. Egal, wie x gewählt wird, diese Summe ist durch 2 teilbar, nämlich: $(4 \cdot x + 6) : 2 = 2 \cdot x + 3$

2. Das Primzahlenrätsel

Die Diagonale von links oben nach rechts unten ist zu Beginn am wichtigsten. Da M doppelt so groß wie P sein soll, gilt: $2 \cdot P = M$. Außerdem muss ja die Summe 80 ergeben, also ist $M + P + M = 2 \cdot P + P + 2 \cdot P = 80, also\ 5 \cdot P = 80$. Daraus kannst du die ersten beiden Zahlen ermitteln, nämlich $P = 16\ und\ M = 32$.
Nun geht es an die andere Diagonale. Da $D + P + D = 80$ sein muss, gilt $C + D = 64$. Der Rest ist Probieren: C und D müssen Primzahlen sein, aber C soll auch noch mehr als das zehnfache von D sein. Wenn $C = 2$ wäre, dann müsste $D = 62$ sein (Summe 64!), aber 62 ist keine Primzahl. Wenn $C = 3$ wäre, dann müsste $D = 61$ sein. Das geht!
Wenn $C = 5$ wäre, dann müsste $D = 59$ sein und auch das erfüllt unsere beiden Bedingungen. Probieren wir noch die nächste Primzahl: Wenn $C = 7$ wäre, dann müsste $D = 57$ sein und wäre damit nicht mehr mindestens zehnmal so groß wie C. Es gibt also keine weiteren Lösungen, denn für jedes größere C wird das D kleiner und kleiner und erfüllt somit die zweite Bedingung nicht mehr. Sehen wir uns abschließend die beiden Lösungen noch einmal an:

32		3
	16	
61		32

32		5
	16	
59		32

3. Wie viel ich auch nimm, die Summe ist prim!

Natürlich kann man das Problem durch Probieren lösen, aber da könntest du relativ lange dafür brauchen! Versuchen wir es also doch durch Überlegung. Zuerst überlegen wir, wie viele Kugeln überhaupt in der Schachtel sind. Es sind mindestens 9, aber maximal 21 (da von jeder Farbe mindestens 3 und maximal 7 da sind). Dazwischen gibt es vier Primzahlen, nämlich 11, 13, 17 und 19. Nimmt man nun eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus, bleiben also 8, 10, 14 bzw. 16 Kugeln übrig. Davon ist nur die zweite Lösung durch 5 teilbar, also müssen 13 Kugeln in der Schachtel sein!
Alle Möglichkeiten, 13 in drei Summanden zu zerlegen, sind unten aufgeschrieben. Jene Zerlegungen, bei denen der zweite Summand (gelb) den dritten (rot) teilen kann, sind umrahmt!

$$
\begin{array}{lllll}
3+3+7, & \boxed{4+3+6}, & 5+3+5, & 6+3+4, & \boxed{7+3+3} \\
3+4+6, & 4+4+5, & \boxed{5+4+4}, & 6+4+3 & \\
\boxed{3+5+5}, & 4+5+4, & 5+5+3, & & \\
3+6+4, & 4+6+3, & & & \\
3+7+3. & & & &
\end{array}
$$

Jetzt nehmen wir eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus und betrachten wieder die Summanden. So entsteht:

$$3+4+3, \quad \boxed{4+2+4}, \quad 5+3+2, \quad 7+2+1.$$

Nur bei der eingerahmten Zerlegung ist die Anzahl der roten immer noch durch jene der gelben Kugeln teilbar. Also waren zu Anfang 4 blaue, 3 gelbe und 6 rote Kugeln in der Schachtel!