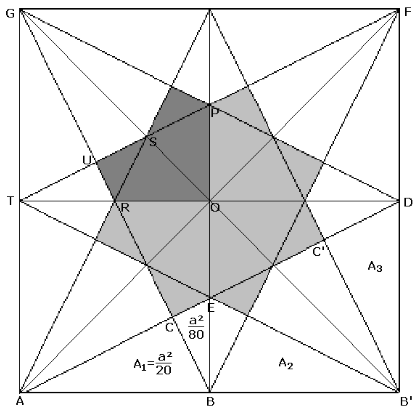
mathe-corner **Dezember 2014**

LÖSUNGEN (5. – 8. KLASSEN)

1. Die zerbrochene Krippenfigur

Um den Täter herauszufinden, müssen wir vier Fälle durchspielen:
1. Fall: Sandra sagt die Wahrheit. Daher lügt Moritz und wegen seiner Aussage („Georg lügt!") müsste auch Georg die Wahrheit sagen. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.
2. Fall: Georg sagt die Wahrheit. Er beschuldigt Moritz als Täter. Weil Florian lügt („Ich war's nicht!"), müsste auch er der Täter sein. Es gibt nach Voraussetzung nur einen Täter und daher lügt auch Georg, was zu einem Widerspruch führt.
3. Fall: Moritz sagt die Wahrheit. Richtigerweise meint er, dass Georg lügt, daher kann Georgs Aussage („Moritz war's!") nicht stimmen. Auch Sandra lügt und ihre Aussage, Georg sei der Täter, ist ebenfalls zu verwerfen. Da Florian auch lügt, macht er sich selbst zum Täter. Alle vier Aussagen ergeben zusammen keinen Widerspruch!
4. Fall: Florian sagt die Wahrheit. Dann lügt Moritz und wie bei Fall 1 müsste Georg ebenfalls die Wahrheit sagen, was einen Widerspruch ergibt.
Nur Fall 3 führt zu Widerspruchsfreiheit; demnach ist **Florian** derjenige, der den Krippenengel fallen ließ.

2. Der Stern



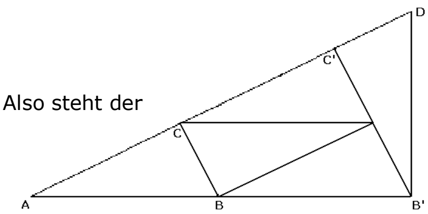
Sei die Quadratseitenlänge a. A_1 sei die Fläche des Dreiecks ΔABC.
Die Dreiecke mit den Flächen A_1, A_2 und A_3 sind wegen der Symmetrie der Gesamtfigur kongruent. Außerdem sind sie ähnlich zu $\Delta AB'D$. Da dessen Fläche $a^2/4$ beträgt und A_1 genau fünfmal in $\Delta AB'D$ Platz hat (siehe Skizze unten) gilt: $A_1 = a^2/20$.
Für die Fläche des Dreiecks ΔBCE gilt: $A_{BCE} = A_{ABE} - A_1 = \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{20} = \frac{a^2}{80}$
Nun betrachten wir den Punkt S. Er ist Schwerpunkt des Dreiecks ΔAFG und teilt daher die Schwerlinien im Verhältnis 1:2.
Damit können wir die Fläche des Dreiecks ΔORS berechnen:
$\overline{OR} = \frac{a}{4}$, $\overline{OS} = \frac{\overline{OG}}{3} = \frac{d}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$. Da der Winkel $\sphericalangle ROS = 45°$, lässt sich die Fläche mit der Sinus-Formel berechnen:

$$A = \frac{\overline{OR} \cdot \overline{OS} \cdot \sin 45°}{2} = \frac{a^2}{48}$$

Das ist aber auch die Fläche des kongruenten Dreiecks ΔOPS.
Schließlich kann man die Fläche des Vierecks $ORUS$ bestimmen:

$$A_{ORUS} = A_{OTP} - A_{RTU} - A_{OPS} = \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{80} - \frac{a^2}{48} = \frac{7a^2}{240}$$

Die Fläche des Sterns ist genau das Achtfache davon: $8 \cdot \frac{7a^2}{240} = \frac{7a^2}{30} = \frac{7}{30}a^2$. Also steht der Flächeninhalt des Sterns zu dem des Quadrats im Verhältnis **7 zu 30**.



3. Eine besondere Zahl

Diese Aufgabe ist eine gute Übung, sich wieder die Teilbarkeitsregeln ins Gedächtnis zu rufen: Da die gesamte Zahl aus 10 Ziffern durch 10 teilbar sein soll, ist die letzte Ziffer **0**. Die fünfte Ziffer ist daher **5**, weil die Zahl aus den ersten 5 Ziffern durch 5 teilbar sein muss und 0 nicht mehr zur Verfügung steht. An den Positionen 2, 4, 6 und 8 müssen gerade Ziffern stehen, da die entsprechenden Zahlen alle gerade sein müssen. Für die ungeraden Positionen stehen somit nur noch die Ziffern 1, 3, 5, 7 zur Auswahl.
Also sieht die Zahl so aus: **ugug5gugu0**. (g… gerade Ziffer, u… ungerade Ziffer)
Wegen der Teilbarkeit durch 4 muss die Zahl, bestehend aus der 3. und 4. Ziffer, durch 4 teilbar sein. Da die 3. Ziffer ungerade ist, gibt es folgende Möglichkeiten: 12, 16, 32, 36, … Als 4. Ziffer kommen also nur **2** und **6** in Frage.
Da die Zahl aus den ersten drei Ziffern durch 3 teilbar ist, ist die Ziffernsumme dieser drei Ziffern durch 3 teilbar. Weil die Zahl aus den ersten 6 Ziffern durch 6, also auch durch 3 teilbar ist, gilt auch für die Ziffernsumme der ersten 6 Ziffern, dass sie durch 3 teilbar ist. Daher ist auch die Ziffernsumme der 4., 5. und 6. Ziffer durch 3 teilbar. So ergeben sich zwei Möglichkeiten für die gesuchte Zahl: a) **ugu258ugu0** oder b) **ugu654ugu0**.
Betrachten wir nun die Teilbarkeit durch 8. Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die Zahl aus ihren letzten 3 Ziffern durch 8 teilbar ist. Das sind in unserem Fall die 6., 7. und 8. Ziffer. Die 6. Ziffer ist entweder 4 oder 8, aber weil sowohl 400 als auch 800 durch 8 teilbar sind, können wir uns auf die 7. und 8. Ziffer beschränken. Es gibt folgende Möglichkeiten:
a) 16, 96, b) 32, 72. Es ergeben sich nun folgende zwei denkbare für unsere Zahl:
a) **u4u258u6u0** oder b) **u8u654u2u0**.
Zum Fall a): Wegen der Teilbarkeit durch 9 muss die Zahl aus der 7., 8. und 9. Ziffer durch 3 teilbar sein (weil es die die Zahl aus den ersten 6 Ziffern auch ist). Die 7. Ziffer ist entweder 1 oder 9: Unter den 6 Möglichkeiten 163, 167, 169, 961, 963, 967 hat nur **963** eine durch 3 teilbare Ziffernsumme, daher wäre die Zahl **7412589630** oder **14712589630.** Bei beiden Zahlen scheitert es aber an der Teilbarkeit durch 7, daher muss die gesuchte Zahl vom Typ b sein.
Beim Fall b ist die 7. Ziffer 3 oder 7: Unter den 6 Möglichkeiten **321**, **327**, 329, 721, **723**, **729** haben die fett gedruckten eine durch 3 teilbare Ziffernsumme, womit sich für die Endform der Zahl letztlich 8 Varianten ergeben: 7896543210, 9876543210, 1896543270, 9816543270, 1896547230, 9816547230, 1836547290, 3816547290.
Unter diesen besteht aber einzig und allein **3816547290** den Teilbarkeitstest durch 7. Der Vollständigkeit halber müssen wir noch die Teilbarkeit der 1. Ziffer durch 1 (trivial) und die Teilbarkeit der Zahl aus den ersten 3 Ziffern durch 3 (passt!) kontrollieren, um unsere Zahl zu bestätigen.