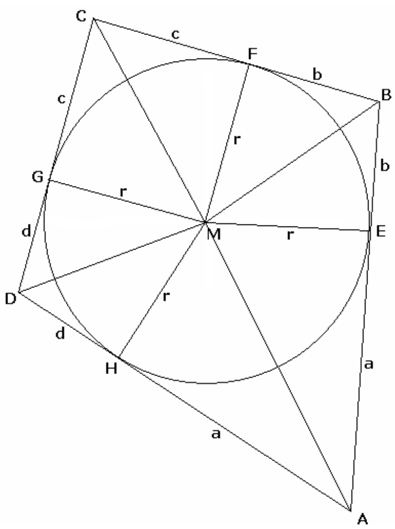
LÖSUNGEN (5. – 8. KLASSEN)

1. Tangentenvierecke



Wir zeichnen zunächst den Inkreismittelpunkt M ein und beweisen, dass die Teilvierecke AEMH, BFME, CGMF und DHMG **Deltoide** sind:
Wir zeigen die Kongruenz der beiden Dreiecke AEM und AMH:
1. MÖGLICHKEIT: Da die Radien in einem rechten Winkel auf die Seiten stehen, stimmen die beiden Dreiecke in drei Bestimmungsstücken überein: Sie haben beide eine Seite der Länge r, einen rechten Winkel und die gemeinsame Seite AM, daher sind sie nach dem SSW-Satz kongruent.
2. MÖGLICHKEIT: Wenn man davon ausgeht, dass sich im Inkreismittelpunkt die Winkelhalbierenden schneiden, dann ist AM die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle HAE = \alpha$. Somit haben die Dreiecke AEM und AMH drei gemeinsame Bestimmungsstücke: den Winkel $\alpha/2$ bei A, die Seite AM und eine Seite der Länge r. Wieder kann man mit dem SSW-Satz auf die Kongruenz der beiden Dreiecke schließen.
Damit ist das Viereck AEMH ein Deltoid, für die anderen Vierecke verläuft die Argumentation analog.
Wegen der Deltoideigenschaft gibt es gleich lange Seiten a, b, c, d und es gilt:
$AB + CD = (a + b) + (c + d) = (b + c) + (a + d) = BC + AD$; somit ist die Behauptung bewiesen.

2. Große Zahlen

Nennen wir die (unbekannte) Startzahl x und schauen, welches Muster einer so generierten Zahl zugrunde liegt, wenn bei jedem Schritt zunächst vordoppelt und dann 1 abgezogen wird:

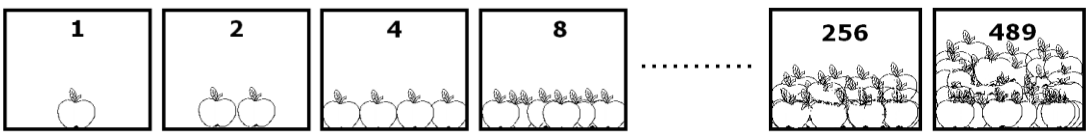
Nach Schritt 1 erhält man: $2x - 1$
Nach Schritt 2 erhält man: $2 \cdot (2x - 1) - 1 = 4x - 3$
Nach Schritt 3 erhält man: $2 \cdot (4x - 3) - 1 = 8x - 7$
Nach Schritt **4** erhält man: $2 \cdot (8x - 7) - 1 = 16x - 15 = 2^{\mathbf{4}}x - 2^{\mathbf{4}} + 1$
...
Nach Schritt **2014** erhält man somit: $2^{\mathbf{2014}}x - 2^{\mathbf{2014}} + 1$

Dabei soll $2^{2015} + 1$ herauskommen:

$$2^{2014}x - 2^{2014} + 1 = 2^{2015} + 1 \qquad / +2^{2014} - 1$$
$$2^{2014}x = 2^{2014} + 2^{2015}$$
$$2^{2014}x = 2^{2014} + 2 \cdot 2^{2014}$$
$$2^{2014}x = 3 \cdot 2^{2014} \qquad /: 2^{2014}$$
$$x = 3$$

3. Der Apfelbauer

Der Apfelbauer hat das **Binärsystem** für seine Aufteilung verwendet:



Für die letzte Kiste gehen sich keine 512 Äpfel mehr aus, daher beinhaltet sie 489 Äpfel. Sollte ein Kunde von 1 bis zu 511 Äpfel verlangen, ist alles kein Problem: Der Bauer nimmt die Kisten entsprechend den Ziffern der entsprechenden Zahl im Binärsystem.
Ab 512 bis 1000 entsteht auch kein Problem: Der Bauer verwendet ab jetzt die 489-er Kiste, für die restliche Äpfelzahl, die maximal 511 sein kann, kann er wieder auf das Binärsystem zurückgreifen.
Zum Beispiel möchte jemand 770 Äpfel haben: 770 – 489 = 281, 281 = $(100011001)_2$.
Daher nimmt der Bauer die Kisten mit 489, 256, 16, 8 Äpfeln und noch die mit 1 Apfel.